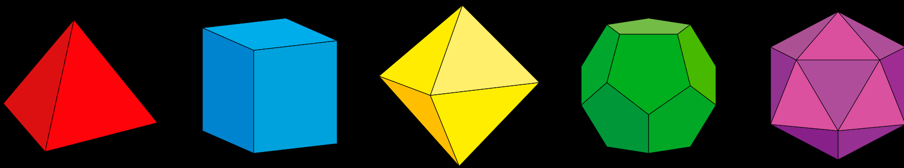


Solides de Platon

ou polyèdres réguliers

en 3D

Fascicule réalisé d'après

AN ILLUSTRATION AND MENSURATION OF SOLID GEOMETRY

John Lodge Cowley - 1787

et

GÉOMÉTRIE STÉRÉOGRAPHIQUE,

OU

RELIEFS DES POLYÈDRES

F.-C.-M. Marie 1835

Laboratoire de Mathématiques J.A. Dieudonné

UMR n° 7351 CNRS UNS

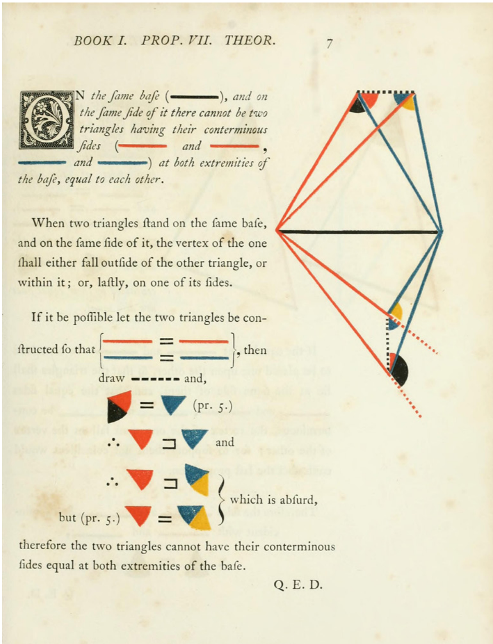
Université de Nice - Sophia Antipolis

http://nice-culture.math.cnrs.fr

L'atelier de construction d'objets mathématiques géants à la BMVR de Nice
est sponsorisé par les "Papeteries du Dauphiné"

Rendre les mathématiques accessibles est une préoccupation ancienne. Parmi les plus belles tentatives plusieurs datent du XIXème siècle.

Citons tout d'abord l'édition des *Éléments d'Euclide* de Olivier Byrne (1847) dans laquelle diagrammes et symboles en couleur remplacent *avantageusement* les lettres.



BOOK I. PROP. VII. THEOR. 7

On the same base (), and on the same side of it there cannot be two triangles having their conterminous sides (and , and) at both extremities of the base, equal to each other.

When two triangles stand on the same base, and on the same side of it, the vertex of the one shall either fall outside of the other triangle, or within it; or, lastly, on one of its sides.

If it be possible let the two triangles be constructed so that { = , = }, then draw and,

= (pr. 5.)

∴ ⊐ and

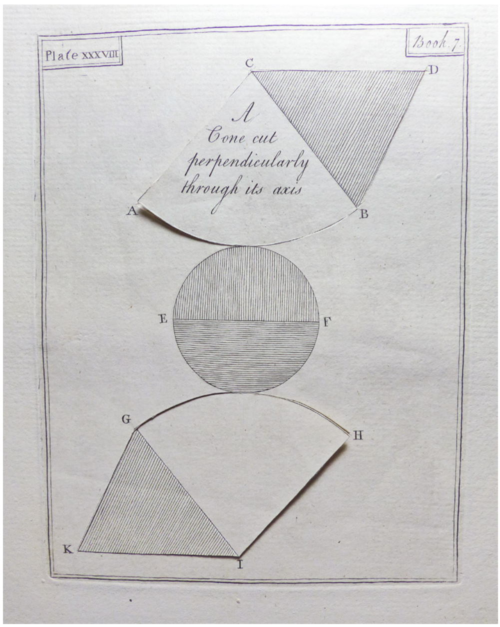
∴ ⊐ } which is absurd,

but (pr. 5.) =

therefore the two triangles cannot have their conterminous sides equal at both extremities of the base.

Q. E. D.

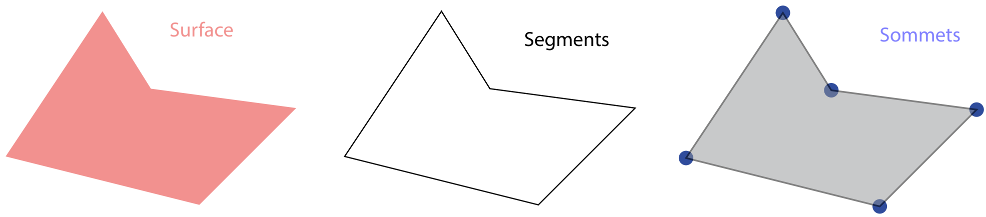
Enfin citons le livre *An Illustration and Mensuration of Solid Geometry* de John Lodge Cowley qui allie les deux propositions précédentes : un livre contenant des figures en relief (ou 3D). C'est de ce livre que nous nous sommes inspirés pour réaliser ce fascicule. Un livre augmenté avant les e-books et la VR.



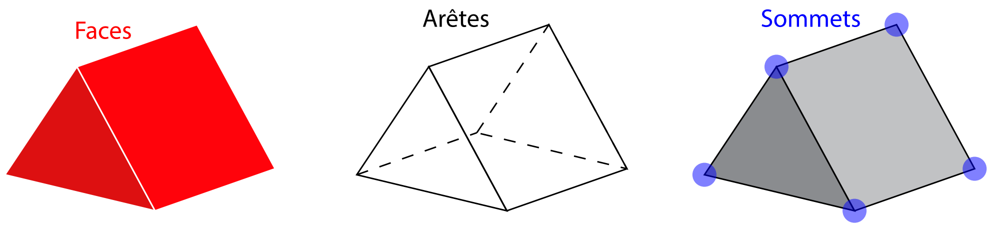
Signalons ensuite la magnifique collection d'objets mathématiques de l'Institut Henri Poincaré qui étaient destinés à l'enseignement, bien avant l'apparition des imprimantes 3D, et rendus célèbres par les photographies de Man-Ray.
Cette collection est exposée à la bibliothèque de l'Institut.

Polyèdres Réguliers

Les triangles △, carrés □, losanges ▱, pentagones ⬠ sont des figures planes appartenant à la famille des **polygones**. Intuitivement, un polygone est la *surface* obtenue en reliant des points (« les sommets ») par des segments de droite (« les arêtes »).



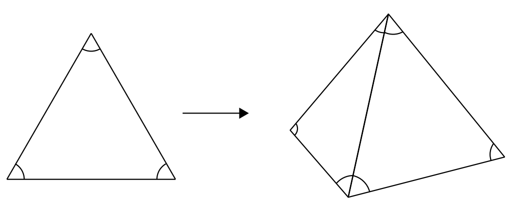
Un **polyèdre** est l'analogue d'un polygone quand on passe dans l'espace (3D) : c'est un *volume* délimité par des polygones (les faces du polyèdre) qui se rencontrent le long d'arêtes communes.



Cette famille comprend donc par exemple : les cubes , les parallélépipèdes, les pyramides, les prismes, etc.

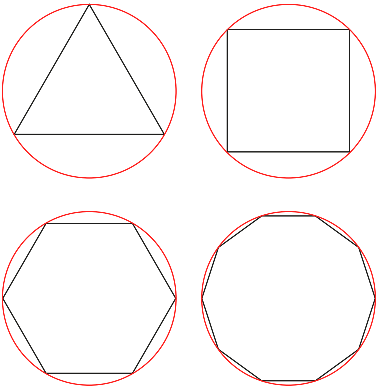
Régularité

Un polygone est dit régulier lorsque toutes ses arêtes ont même longueur et qu'à chaque sommet les arêtes forment un même angle. Par exemple, pour un triangle régulier est synonyme d'équilatéral;

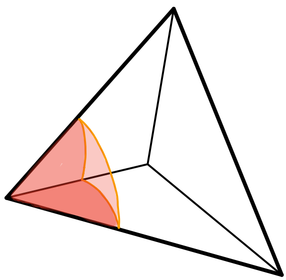


le seul quadrilatère régulier est le carré. Un losange n'est en général pas régulier car ses angles ne sont pas tous égaux.

Il existe des polygones réguliers avec autant d'arêtes que l'on souhaite : plus leur nombre augmentent, plus ils ressemblent à un cercle.



Un polyèdre est dit régulier si toutes ses faces ont la forme d'un même polygone régulier et qu'à chaque sommet les faces forment un même « angle solide ».



Il n'en existe que cinq. Le plus connu est le cube aux faces carrées. Les quatre autres sont : le tétraèdre, l'octaèdre, l'icosaèdre, avec des faces triangulaires et le dodécaèdre avec des faces pentagonales.

Ces volumes sont connus depuis l'antiquité ; ils ont été décrits par Platon qui les associait aux 5 éléments : feu, air, eau, terre et univers.

Théorème de Descartes-Euler

Pour tous ces polyèdres il existe une relation entre le nombre de sommets, d'arêtes et de faces :

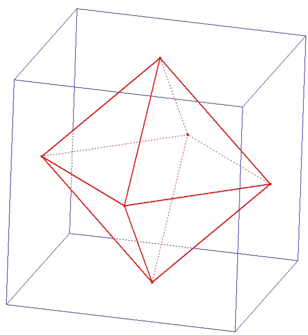
(le nombre de sommets) - (le nombre d'arêtes) + (le nombre de face) = 2

- s : le nombre de sommets
- a : le nombre d'arêtes
- f : le nombre de face

$$s - a + f = 2$$

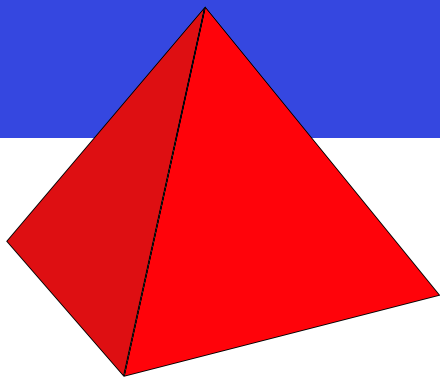
Dualité

La dualité est une construction géométrique qui relie deux polyèdres entre eux. En partant d'un polyèdre donné, on peut en construire un nouveau, son « dual », en reliant entre eux les centres des faces. Par exemple, en partant d'un cube, on obtient un octaèdre.

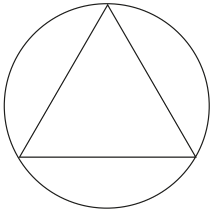


Inversement, si l'on part d'un octaèdre, le polyèdre dual ainsi construit est un cube. On s'aperçoit que le dodécaèdre et l'icosaèdre sont duaux. Quant au tétraèdre, il est son propre dual !!

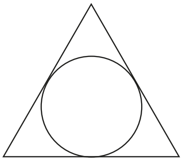
TÉTRAÈDRE



Le **Tétraèdre** régulier est un corps dont les faces sont quatre triangles équilatéraux égaux.
Comme tous les polyèdres réguliers, il peut être inscrit dans une sphère, et circonscrit à une autre sphère (comme le triangle équilatérial l'est au cercle, voir figure ci-contre).



Triangle inscrit dans un cercle

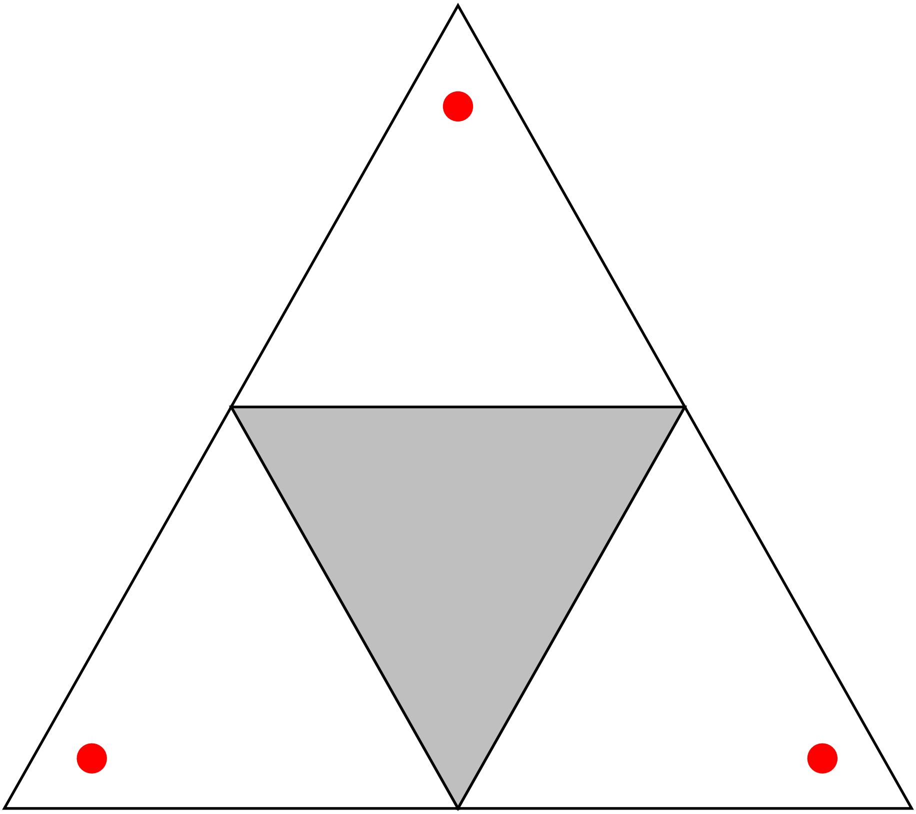


Triangle circonscrit au cercle

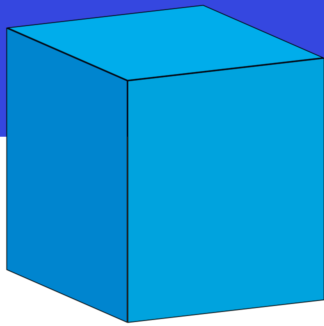
Construction en 3D
« Si on relève les faces en pliant les côtés communs considérés comme charnières et en prenant pour base le triangle gris, la réunion des côtés respectifs de ces quatre triangles produira le Tétraèdre. »

Vérifier le théorème Descartes-Euler :

	…… sommets
-	…… arêtes
+	…… faces
=	……



Hexaèdre



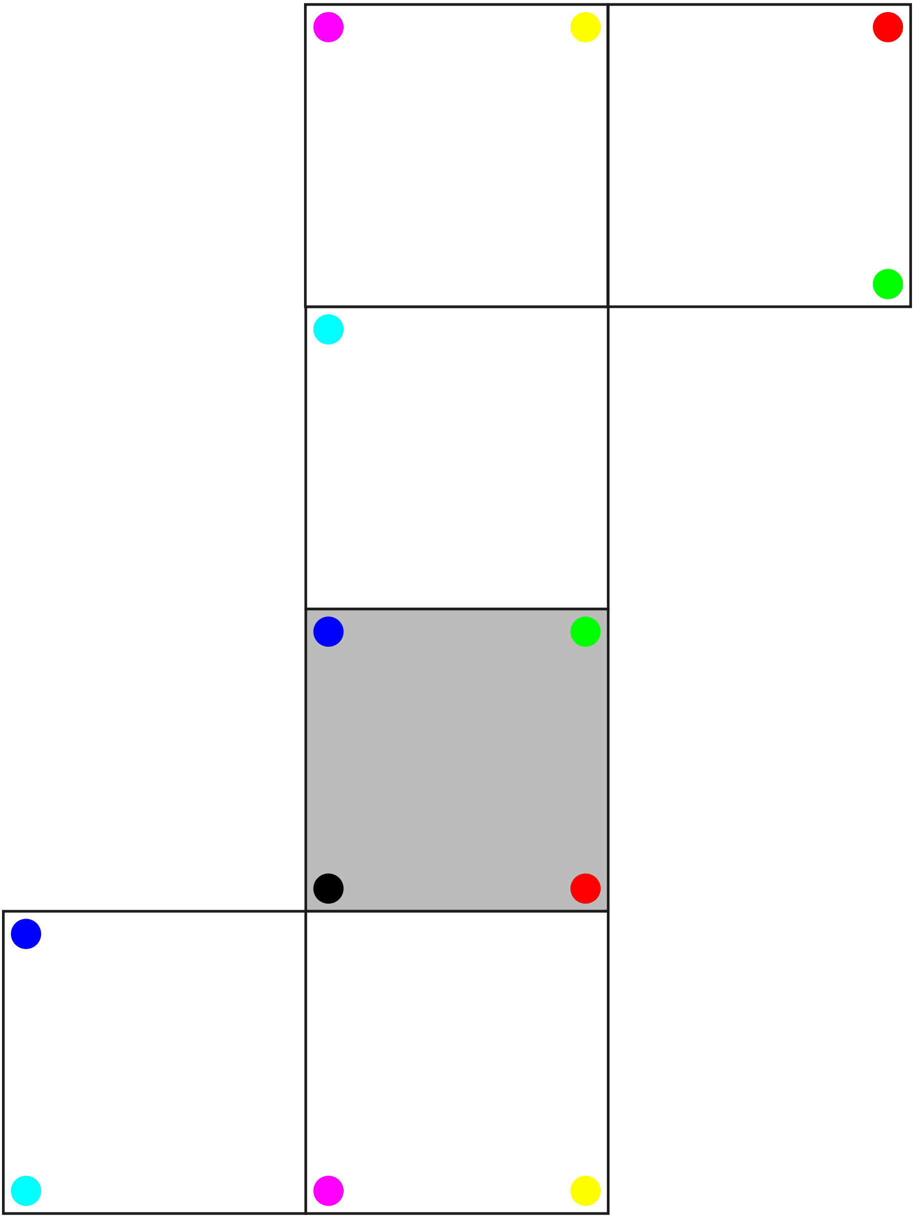
L'**Hexaèdre** ou **Cube** est un polyèdre régulier limité par six carrés égaux.

Construction en 3D

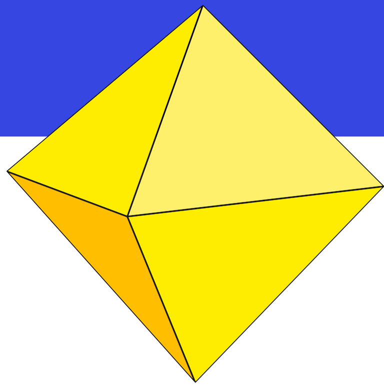
« Pour obtenir la représentation de ce corps il faut relever les faces et les pliant suivant les côtés communs de manière à ce que les côtés se réunissent en arête et que le polyèdre ait pour base le carré gris. »

Vérifier le théorème Descartes-Euler :

	...... sommets
-	...... arêtes
+	...... faces
=	......



Octaèdre



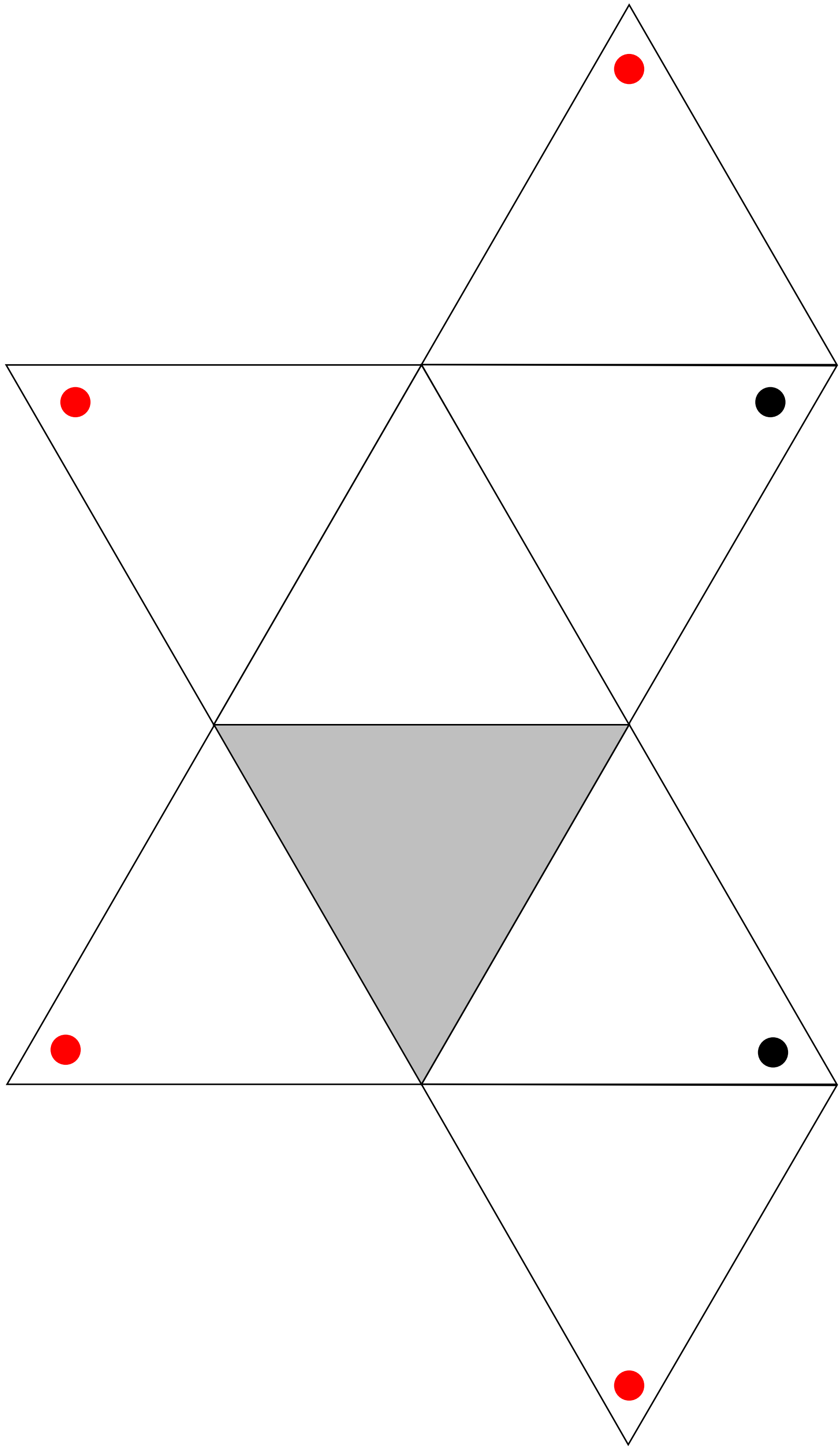
L'**Octaèdre** régulier est un polyèdre régulier qui est limité par huit triangles équilatéraux égaux.

Construction en 3D

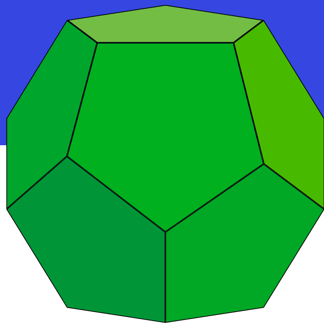
« Le patron de l'Octaèdre régulier étant composé de huit triangles il faut relever les faces suivant les côtés communs en prenant pour base du corps le triangle gris. »

Vérifier le théorème Descartes-Euler :

	...... sommets
-	...... arêtes
+	...... faces
=	......



Dodécaèdre



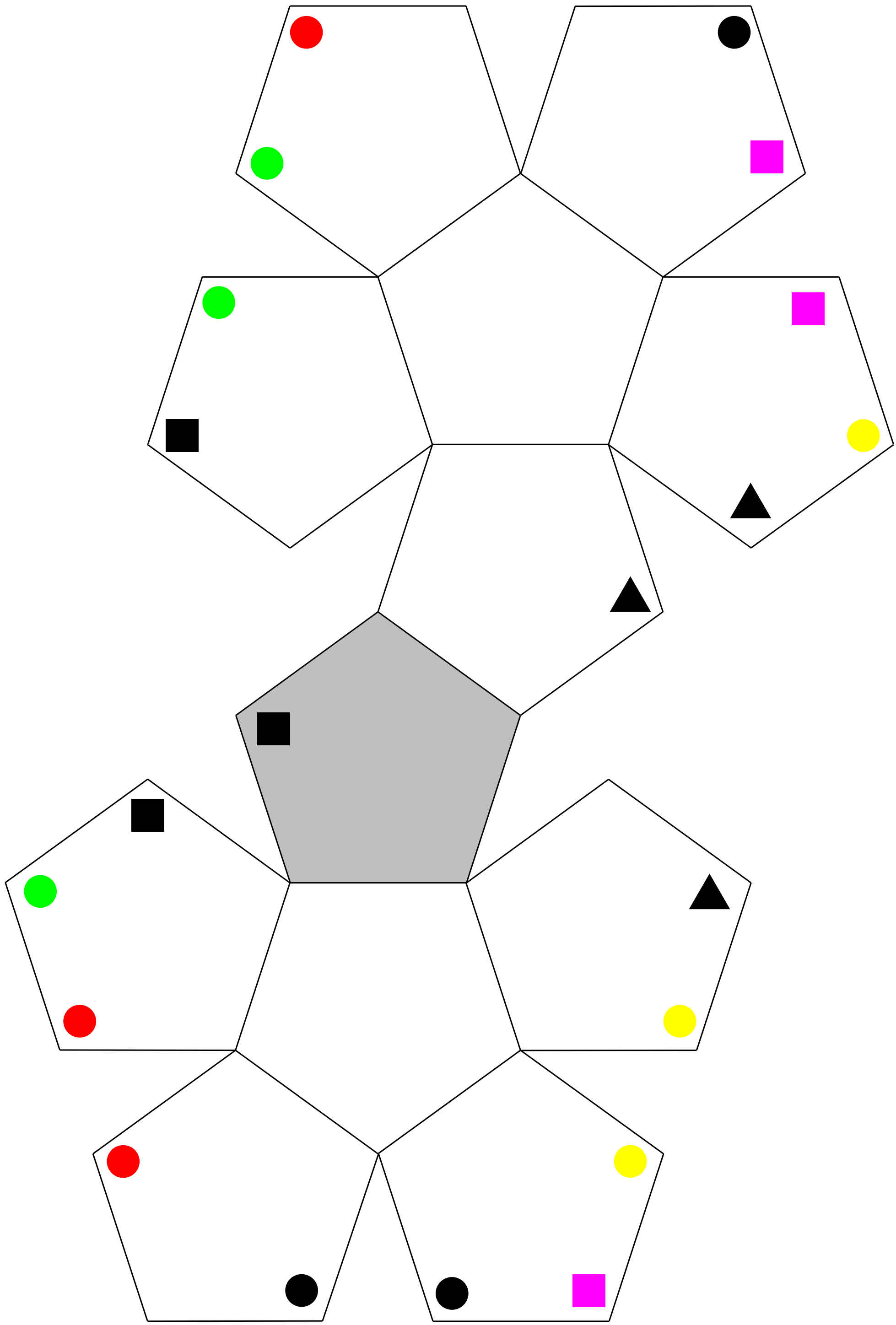
Le **Dodécaèdre** régulier est un polyèdre qui a ses angles égaux et trièdres. Son volume est compris sous douze pentagones réguliers égaux.

Construction en 3D

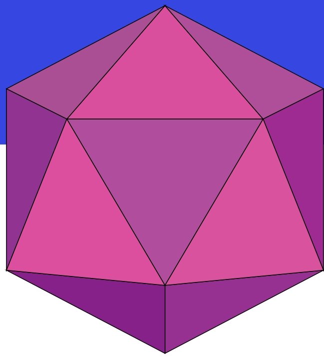
« Le patron du Dodécaèdre régulier est constitué de douze pentagones réguliers égaux. En relevant ces pentagones suivant les côtés communs et prenant pour base celui grisé, il en résultera ce corps en volume. »

Vérifier le théorème Descartes-Euler :

	…… sommets
-	…… arêtes
+	…… faces
=	……



ICOSAÈDRE



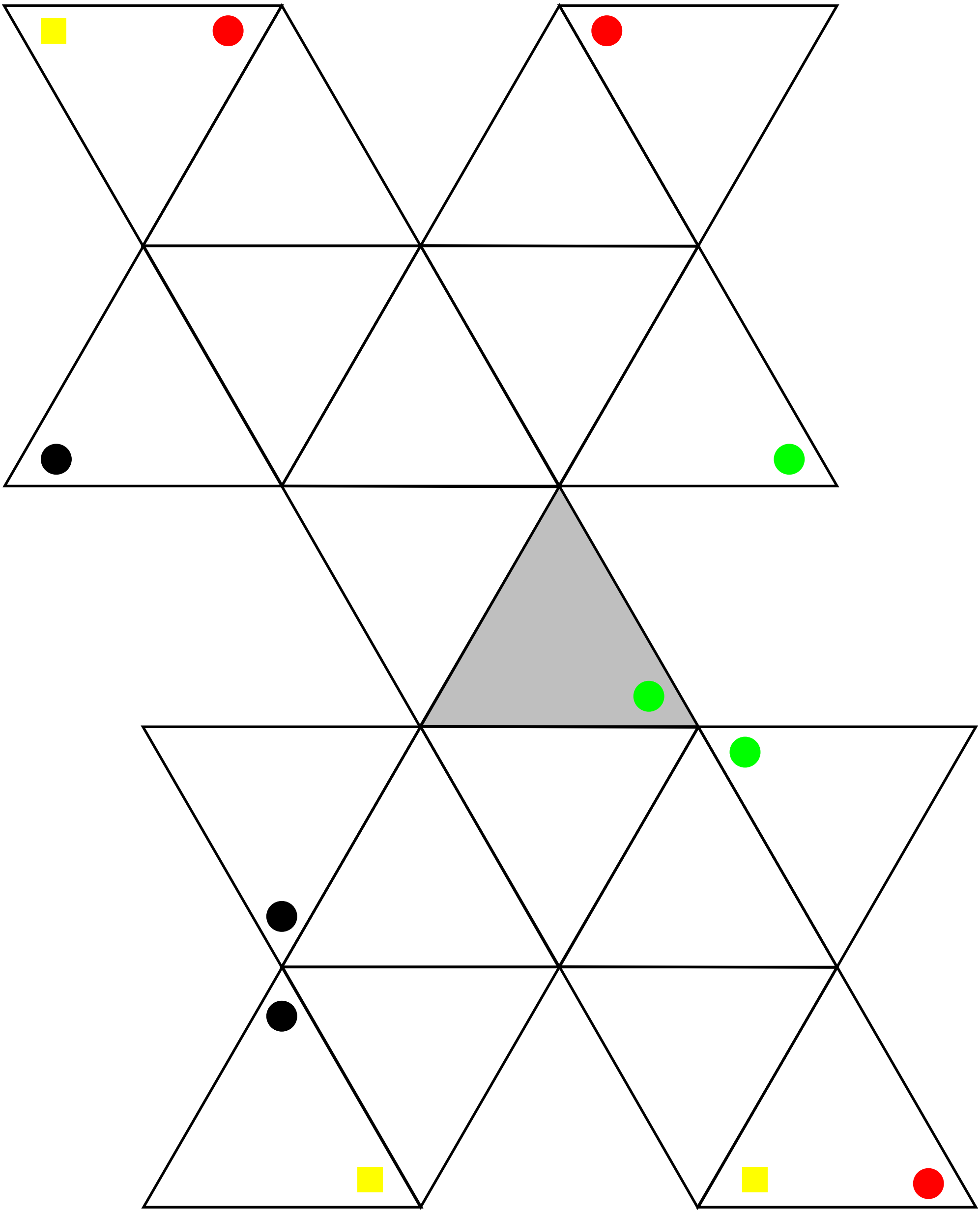
L'**Icosaèdre** régulier est un polyèdre dont la surface est constituée de vingt triangles équilatéraux égaux.

Construction en 3D

« Le patron de l'icosaèdre régulier étant constitué de 20 triangles, on relèvera les faces en pliant les côtés communs à deux triangles en considérant comme base celui en gris.»

Vérifier le théorème Descartes-Euler :

	...... sommets
-	...... arêtes
+	...... faces
=	......



Tétraèdre de Sierpinski

Élèves de CM2 de l'école Nikaïa construisant un tétraèdre fractal au Laboratoire de Mathématiques de Nice (Juillet 2018).

La connaissance scientifique possède en quelque sorte des propriétés fractales: nous aurons beau accroître notre savoir, le reste -- si infime soit-il -- sera toujours aussi infiniment complexe que l'ensemble de départ.

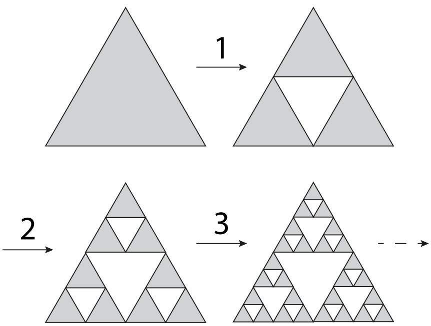
Isaac Asimov

Une fractale est un objet mathématique -courbe ou surface- dont la structure est invariante par changement d'échelle. Autrement dit quel que soit le « zoom » sur la fractale, on voit la même fractale. On parle de figure auto-similaire.

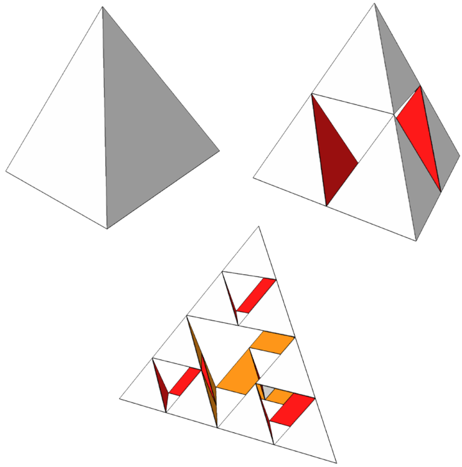
De nombreux phénomènes naturels possèdent des formes fractales : le tracé des côtes maritimes ou encore l'aspect du chou romanesco.

L'adjectif « fractal » est un néologisme créé par Benoît Mandelbrot en 1974 à partir de la racine latine fractus, qui signifie « brisé », « irrégulier ».

La fractale géante que nous vous proposons de construire pour la fête de la science est basée sur le tétraèdre. On peut construire des fractales à partir de tous ces polyèdres.
Le tétraèdre fractal est l'extension naturelle à la 3e dimension du triangle de Sierpinski. On le nomme aussi tétraèdre



Construction du triangle de Sierpinski



Construction du tétraèdre de Sierpinski

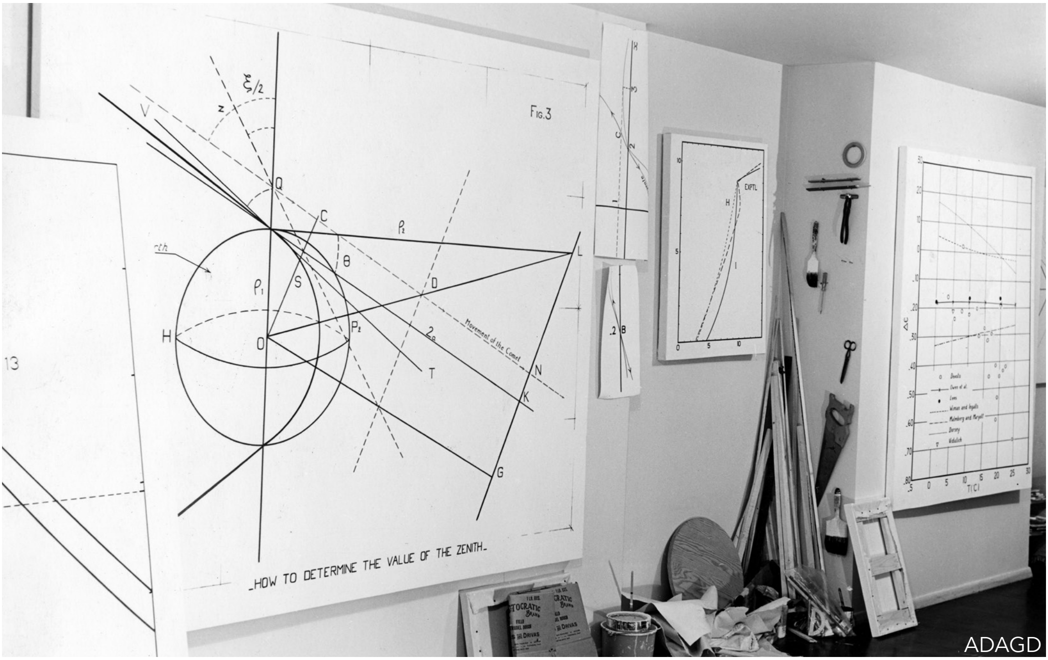
de Sierpinski.

Caractéristique intéressante de cette fractale : sa surface ne varie pas d'une itération à l'autre. A l'infini, sa surface est identique à celle du tétraèdre d'origine.

Pour aller plus loin, montrez que la surface de cette fractale ne varie pas quelle que soit l'itération.
Pour vous en convaincre, commencez par calculer la surface d'un tétraèdre d'arête de longueur «L», puis calculez la surface de la fractale à la première itération.

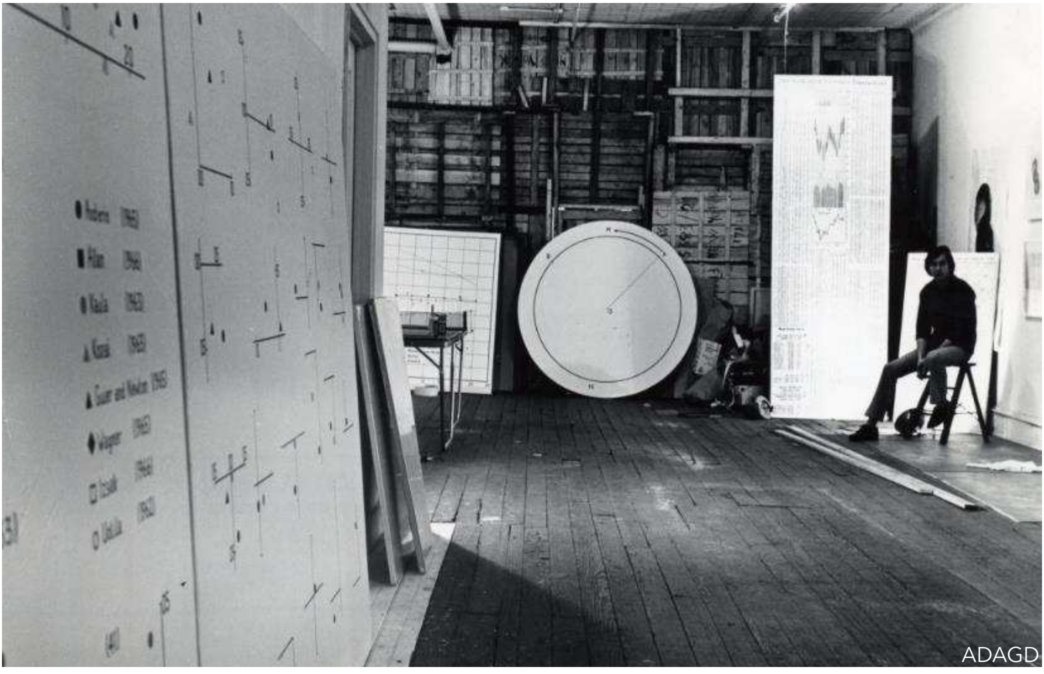
Pour notre construction, nous n'allons pas prendre un tétraèdre géant que nous découperions comme indiqué ci-dessus. Mais nous construirons notre fractale géante à partir de petits tétraèdres en papiers de 10cm que nous allons assembler jusqu'à l'itération 5 pour obtenir une fractale de 3,2m !!

Saurez vous calculer le nombre de tétraèdres en papier qui seront nécessaires pour construire notre fractale d'itération 5 ?



Exposition Bernar Venet

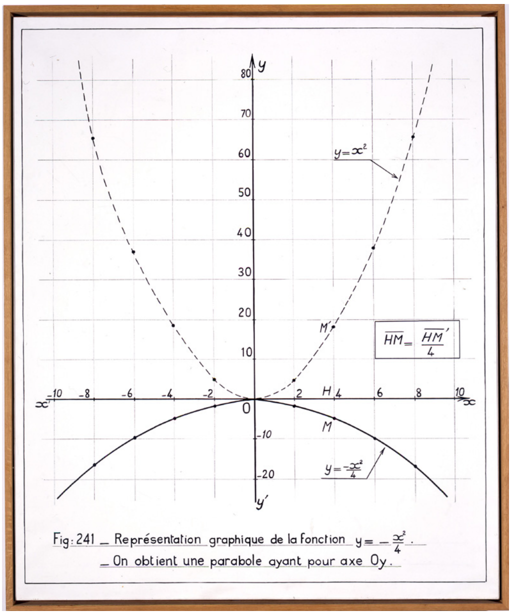
Les années conceptuelles 1966-1976



« En présentant ce que l'on définit habituellement comme « objets mathématiques » : nombres, figures, espaces, fonctions, relations, structures, etc.... l'œuvre d'art peut alors s'élever à un niveau d'abstraction maximal qui lui était étranger. Le « non-référentiel » est poussé dans ses extrêmes limites. Nous n'avons plus, comme dans l'art abstrait, de symbolique non plus, celle de la forme ou de la couleur par exemple... Je propose un système auto-référentiel maximal, celui que seule une équation mathématique peut contenir. »

Bernar Venet a entrepris, dès les années 1960, une radicalisation sans précédent de l'expérience artistique et de la production esthétique. Rebuté par les conventions ressassées de l'art français, fasciné par le formalisme américain et, surtout, Marcel Duchamp, il s'est imposé, à partir de 1970, comme l'un des chefs de file de l'art conceptuel.
L'exposition propose pour la toute première fois d'explorer cette période insuffisamment connue de son travail, qui s'amorce à Nice pour trouver son déploiement aux Etats-Unis.
Conceptuelle, sculpturale et picturale, l'œuvre de Bernar Venet se développe alors dans le sens d'une réflexion sur l'identité de l'art et les rapports entre expression artistique et savoir scientifique, associant l'incertitude, l'aléatoire et le désordre aux données mathématiques.
Cette période très fructueuse pendant laquelle il fait entrer dans le champ de l'art, l'abstraction pure de la recherche scientifique, l'objectivité et rationalité des mathématiques, marque aussi les débuts d'une véritable approche pluridisciplinaire. Au contact des artistes de la Judson school, Bernar Venet, entreprend en effet un projet de ballet, organise des performances et conférences, qui offriront autant de prétextes au déploiement d'un programme d'événements associés avec différents acteurs du territoire. Aux côtés de la présentation d'une centaine d'œuvres, de nombreuses archives issues de la Venet Foundation, viendront éclairer le processus créatif de l'artiste.

L'exposition est envisagée comme un diptyque : tandis que le MAC Lyon organise une rétrospective de l'ensemble de son œuvre, le MAMAC propose une plongée dans ce moment spécifique et intense de sa pratique, qui a permis d'inscrire Bernar Venet parmi les grands artistes de la scène conceptuelle internationale des années 1960.



Représentation graphique de la fonction
$y = - x^2/4$,1966, acrylique sur toile, 146 x 121 cm,
Collection Centre Pompidou-Mnam, Paris.

EXPOSITION

Bernar Venet. Les années conceptuelles 1966-1976

12 octobre 2018 – 13 janvier 2019

MAMAC – Nice

Bernar Venet dans son atelier à Nice, 1966. © Courtesy Archives Bernar Venet, New York.

Musée d'Art Moderne et d'Art Contemporain
Place Yves Klein – Nice
04 97 13 42 01
11h 18h - Fermeture le lundi
Ouverture de 10h à 18h à partir du 23 juin