Forme-Trou-Chemin-Couleur

C. Gachet[2], *V. Lemesle*[1], *Y. Mabed*[2], *M. Monticelli*[2], *L. Rifford*[2]

NIVEAU Tous niveaux
Groupe : 15 élèves max. / groupe de 2 ou 3
Durée : 1h/ 1h30 pour aller plus loin
Mise en place : 5-10 minutes
Apprentissages visés :Chercher, Représenter

OBJECTIFS
Notions de topologie : déformation, trous, chemins
Visualisation en 3D / Abstraction ludique
Initiation aux autres géométries
Manipuler des objets / Aide à la conceptualisation

REFERENCES AU BO

S'engager dans une démarche, observer, questionner, manipuler, expérimenter, émettre des hypothèses, en mobilisant des outils ou des procédures mathématiques déjà rencontrées, en élaborant un raisonnement adapté à une situation nouvelle.
(Se) repérer et (se) déplacer dans l'espace en utilisant ou en élaborant des représentations .
Reconnaître, nommer, d'écrire, reproduire, représenter, construire quelques solides et figures géométriques.

DESCRIPTION

Un titre d'atelier qui fait référence au jeu Pierre-Feuille-Ciseaux-Puits. Comme pour ce jeu bien connu (proche de la théorie des graphes !), en utilisant et en donnant un sens mathématique aux 4 mots Forme-Trou-Chemin-Couleur, cet atelier propose une initiation aux principales notions liées à la topologie grace à la manipulation et à l'étude de lieux mathématiques : sphère, tore, tétraèdre.
Tout au long de l'atelier, ces lieux seront déformés, troués, coloriés et des chemins seront tracés sur eux. C'est en utilisant de la pâte à modeler, des objets du Mamath, du papier et des ciseaux que les élèves mèneront à bien leurs découvertes et que les 4 mots Forme-Trou-Chemin-Couleur prendront tout leurs sens.

ÉTAPE 1 : DÉ-FORME

Définition de la connexité

Une des premières formes à laquelle on peut penser est la sphère. Demander d'autres formes aux élèves.
Montrer des polyèdres et demander si on peut déformer les polyèdres en une sphère.

Il est possible de déformer un polyèdre en une sphère et une sphère en polyèdre.

Est-ce que cela veut dire qu'on peut déformer un polyèdre en un autre polyèdre ?

Cela permet d'évoquer à ce stade la notion de transitivité et de symétrie de la relation d'équivalence.

À partir d'une sphère en pâte à modeler, demander aux élèves de déformer cette sphère et de la transformer en polyèdres.

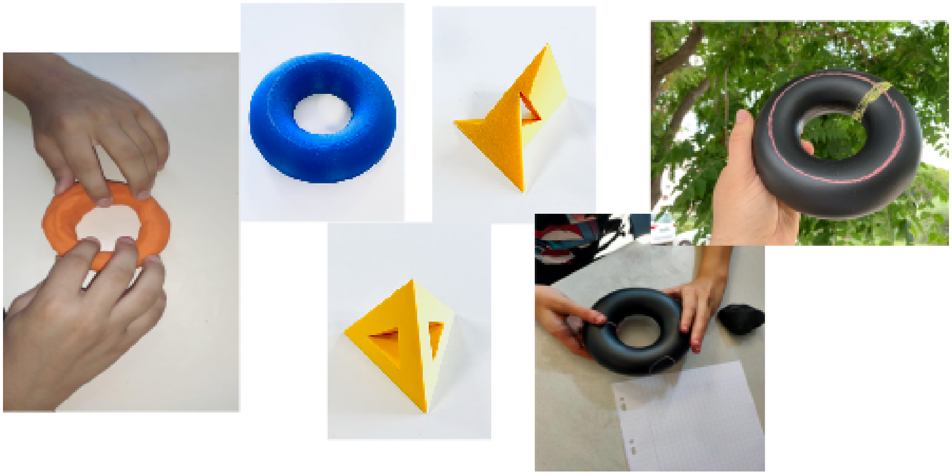
1. Collège Le Pré des Roures, Le Rouret.
2. LJAD, Université Nice- Sophia Antipolis

En reprenant la sphère en pâte à modeler, la déformer de sorte à en faire deux sphères. C'est très facile mais est-ce encore une déformation au sens mathématique ? La réponse est non, car il faut conserver la connexité des formes. On peut donc donner la définition suivante :
Définition : On dit qu'une forme est connexe si elle est en un seul morceau.
Pour insister sur la définition de morceau, poser la question si deux anneaux emboîtés l'un dans l'autre : des morceaux ne sont alors par forcément des "bouts séparés ".

ÉTAPE 2 : TROU

Définition de la simple connexité

Est-il possible alors de faire d'autres déformations avec la pâte à modeler ? Faire un trou par exemple : présentation du tore/du tétraèdre à un trou/ du polyèdre de Szilassi.
Est-ce que ces lieux sont connexes ? Oui et pourtant c'est encore une déformation interdite par les mathématiques. Il faut alors préciser qu'au sens mathématique une déformation doit préserver la simple connexité.



Définition : Un lieu mathématique est simplement connexe si on peut "libérer tous les élastiques" que l'on peut "placer"/"dessiner" sur un lieu.
En créant un trou, on crée des élastiques qui vont rester coincés et on n'a pas le droit de libérer des élastiques coincés en déchirant un tore, par exemple.
Est-ce que le tore à deux trous est simplement connexe ?

ÉTAPE 3 COMPTER LES TROUS

À ce stade, les élèves sont capables de dire si deux lieux quelconques peuvent être déformés l'un en l'autre. Une sphère ne peut pas se déformer en un tore car pour qu'une déformation mathématique doit suivre la loi suivante : le nombre de trous doit être conservé. Le nombre de trous est appelé le genre du lieu mathématique que l'on considère.

Quel est alors le genre de la sphère, du tore, du 2-tore, 3-tore ? Il suffit simplement de compter le nombre de trous. Les élèves peuvent ainsi s'amuser à trouver le genre des lettres de l'alphabet et donc le genre de leur prénom.

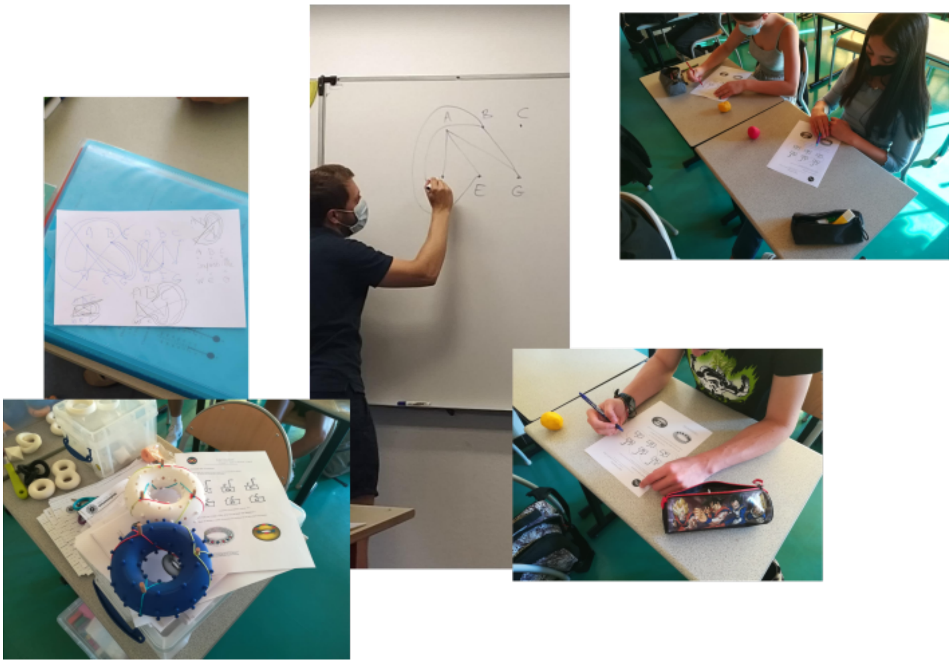
Finalement on se dit que la topologie c'est facile, il suffit de compter les trous...mais est-ce si évident ? Avec un outil type évidoir à pomme, prendre la sphère de pâte à modele et effectuer deux trous transverses. Combien y-a-t-il alors de trous dans cet objet ? Autrement dit, quel est le genre du lieu obtenu ? 2 ou 4 ou autre chose ? En fait c'est 3..

L'idée ici est que le trou n'est pas vraiment bien défini et qu'il est très difficile de le "voir en 3 dimension". Pour bien s'assurer qu'il s'agit d'un à un trou, il faut l'aplatir et déformer notre lieu mathématique de manière à se ramener à un tore, un 2-tore, un 3-tore...C'est la seule bonne manière de compter les trous.
Un petit jeu autour de la déformation pour finir : montrer la vidéo du 2-tore avec un bâton dans un des trous et demander aux élèves de faire passer le bâton dans les deux trous

ÉTAPE 4 À quoi à sert ? Chemin et Couleur

CHEMIN

Le genre donne la complexité de la forme : plus le genre est grand et plus la forme, le lieu est compliqué à étudier. Par contre, dans certain cas, cela simplifie et permet de résoudre des problèmes. Prendre l'enigme des 3 maisons : chacune des trois maisons doit être reliée à trois sources d'énergie différentes. Attention, les chemins ne doivent pas se croiser (voir fiche éleves à distribuer).



Ce problème, bien connu, n'a pas de solution si on essaie de dessiner les chemins sur une feuille de papier. Il a par contre une solution sur le tore et sur le ruban de Mobius. Pour s'en convaincre les élèves pourront observer le tore à picots et les dessiner sur le tore tableau noir ou sur leur tore pâte à modeler.

Une démonstration peut être aussi proposer au tableau en insistant aussi sur le fait que ce n'est pas seulement la dimension deux qui empêche la résolution de l'énigme car sur uen sphère, l'énigme n'a pas de solution non plus.

À ce stade, on peut enchaîner sur une présentation du ruban de Mobius avec l'atelier juste un rectangle et faire dessiner les chemins des 3 maisons pour finir l'atelier.

COULEUR

De la même manière que pour l'énigme des 3 maisons, il existe un autre cas où le genre d'un lieu permet d'aller plus loin. Prenons l'exemple du théorème des 4 couleurs. Ce théorème dit que pour un découpage d'une surface de dimension 2, seules 4 couleurs suffisent pour colorier la surface de manière à ce que deux morceaux adjacents aient une couleur differente.
Ce théorème n'est plus vrai pour le tore. En effet, on peut trouver sur le tore un découpage (et donc un coloriage) qui autorise 7 couleurs. C'est cet aspect que les élèves peuvent deviner grâce au tétraèdre à un trou (5 couleurs nécessaires) et au polyèdre de Szilassi (7 faces et 1 trou donc 7 couleurs nécessaires). Cet aspect a été testé sur les élèves mais il nécessite encore quelques ajustements.

REFERENCES

Essentiellement les articles suivants :
- La science des trous, *T. Libert*
`https://images.math.cnrs.fr/La-science-des-trous.html`
- Devinette multicolore, *C. Boubel*
`https://images.math.cnrs.fr/Devinette-multicolore.html`
- Vidéo pour le 2-tore et le bâton
`https://twitter.com/mathemaniac/status/1270680150506496003`

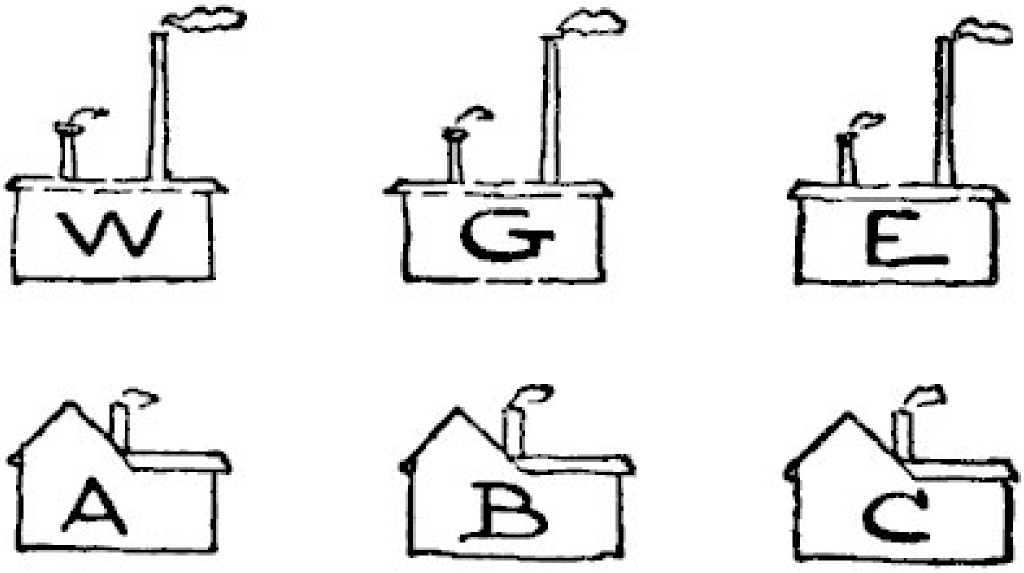
Documents pour les élèves

Les 3 maisons

V. Lemesle[1], *Y. Mabed*[2], *M. Monticelli*[2], *L. Rifford*[2]

L'énigme des 3 maisons

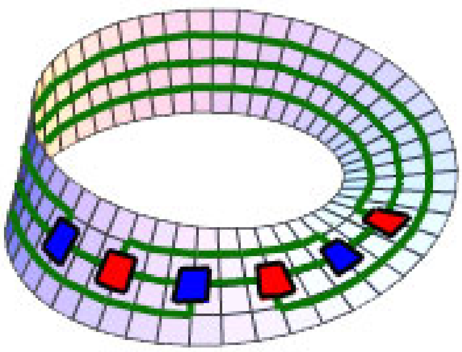
Pourras-tu relier les 3 maisons du bas à chaque usine du haut par un chemin ?
Attention, les chemins ne doivent pas se croiser !

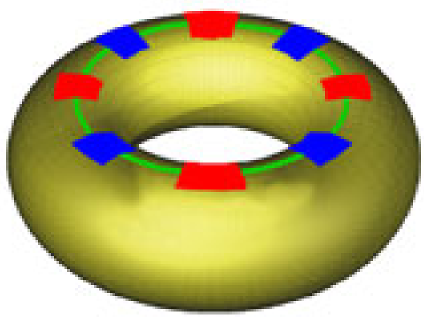


Amusements Mathematiques, Dudeney, 1917

Et sur un tore ? Et sur un ruban de Mobius ?

Essaie de chercher si il existe une solution à ce problème sur ces deux objets topologiques.





1. Collège Le Pré des Roures, Le Rouret.
2. LJAD, Université Nice- Sophia Antipolis