Graphes, Pirates et Coquillages !

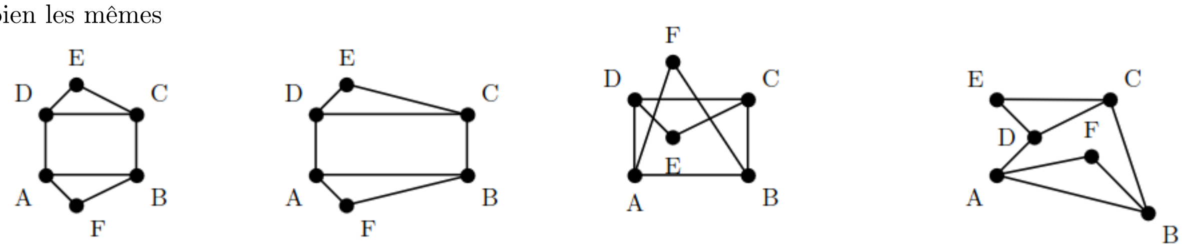
M. Ingremeau,[1] *V. Lemesle,*[2] *M. Monticelli*[3]

Dans cet atelier, tu comprendras ce qu'est un graphe, comment les pirates informatiques peuvent les utiliser, comment ils peuvent nous aider à distribuer des coquillages et surtout comment on peut les génerer au hasard...Tu l'auras compris, les graphes se retrouvent dans tous les domaines allant de l'informatique à la biologie en passant par les réseaux sociaux..bref ils sont partout ! ! !

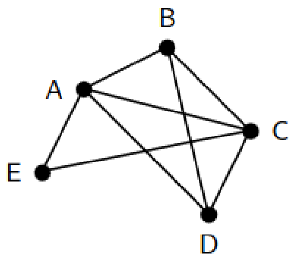
ETAPE 0 : Des graphes pour bien commencer[4]

Qu'est-ce qu'un graphe ? Essaie d'en représenter un très simple (tu peux penser à un arbre généalogique, à un trajet que tu fais quotidiennement ou autre chose)

Un peu de vocabulaire : Un **graphe** est un ensemble de points reliés par des segments. Les points sont appelés **sommets** du graphe et les segments sont les **arêtes**. Comme tu l'auras vu, la position des sommets et la longueur des arêtes n'a pas d'importance. Vérifies alors que les graphes ci-dessous sont bien les mêmes



On appelle **ordre** d'un graphe le nombre de ses sommets. Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes dont il est un extrémité. Deux sommets reliès par une arête sont dits **adjacents**. Complète alors les pointillés de l'exemple ci-dessous.



Ce graphe comporte ... sommets, c'est donc un graphe d'ordre ....

- Du sommet A partent 4 arêtes. Le degré du sommet A est donc 4 .
- Du sommet B partent ... arêtes. Le degré du sommet B est donc ....
- Du sommet C partent ... arêtes. Le degré du sommet C est donc ....
- Du sommet D partent ... arêtes. Le degré du sommet D est donc ....
- Du sommet E partent ... arêtes. Le degré du sommet E est donc ....

Enfin, une **chaîne** est une suite quelconque d'arêtes consécutives (qui se suivent !). Sa **longueur** est le nombre d'arêtes qu'elle comporte. Un **cycle** est une chaîne qui ne comporte pas deux fois la même arête et dont les deux extrémités sont confondues. À partir de l'exemple ci-dessus, donne une chaîne de longueur 2, de longueur 4, de longueur 10, un cycle de longueur 3 et un un cycle de longueur 5

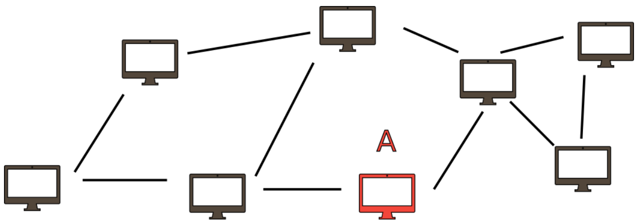
1. Maxime.Ingremeau@univ-cotedazur.fr, LJAD, Université Nice- Sophia Antipolis
2. Valerie-Louise.Lemesle@ac-nice.fr, Collège Le Pré des Roures, Le Rouret.
3. marc.monticelli@math.cnrs.fr, LJAD, Université Nice- Sophia Antipolis
4. Référence : `https://irem.univ-reunion.fr/IMG/pdf/Graphes_college_IREM.pdf`

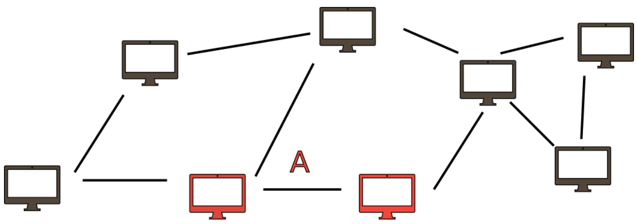
ETAPE 1 : Des pirates

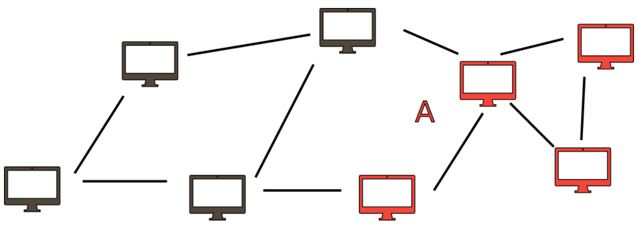
Tu vas à présent t'intéresser à un premier exemple : celui des pirates sur des réseaux informatiques. Pour schématiser, on suppose que les ordinateurs d'un pays sont reliès à l'aide de cables. Des pirates sont capables de couper ces cables de manière à faire le plus de dégats possibles. Comment les en empêcher ? C'est ce que tu vas essayer de comprendre.

Pour cela, il faut définir ce qu'est le **périmètre** d'une partie du graphe.
Si A est une partie du graphe, son périmètre est le nombre d'arêtes qu'il faut enlever pour déconnecter A du reste du graphe.

Donne le périmètre de A dans les exemples suivants :







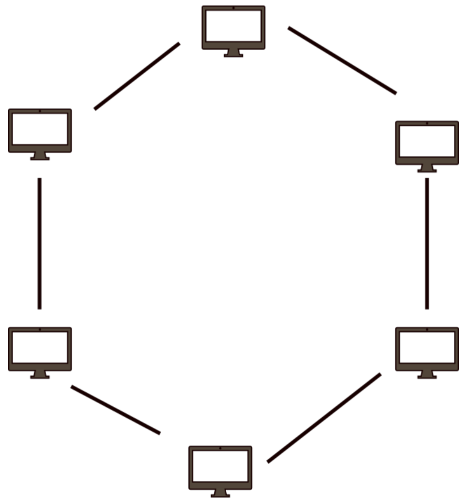
Tu remarques que des petites parties du graphe et des grandes parties du graphe peuvent avoir le même périmètre. Ainsi pour vérifier si une grande partie de graphe peut avoir un petit périmètre, il faut définir une autre quantité :

$$E = \frac{\text{Périmètre de A}}{\text{Nombre d'elèments dans A}}$$

Pour chacuns des exemples précédents, calcule la quantité E.
On appelera le **taux d'expansion du graphe**, la plus petite valeur que peut prendre la quantité E. Ce taux d'expansion est une superbe information pour les pirates : plus le taux d'expansion d'un graphe sera petit et plus ils pourront déconnecter des gros morceaux du réseau en coupant très peu de cables ! ! !

Il faut donc construire des graphes dont les taux d'expansion sont grands. Les graphes complets, où l'on relie tous les sommets les uns aux autres, sont de très bons réseaux car le taux d'expansion est très grand !

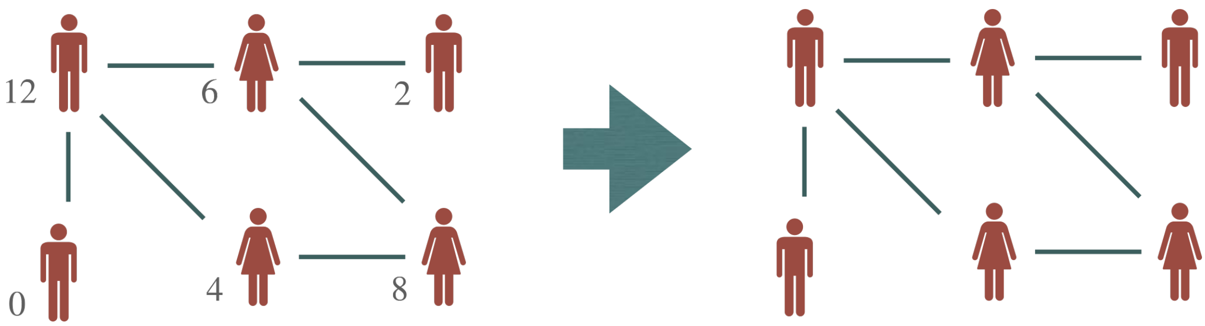
Complète le graphe circulaire ci-dessous de manière à ce qu'il soit complet et calcule son taux d'expansion. Peux-tu compter combien d'arêtes possèdent ce graphe ? Est-il possible de le calculer en fonction de son nombre de sommets ? Essaie de trouver une formule pour n'importe quel nombre de sommets.



ETAPE 2 : Des coquillages

Tu l'auras donc compris pour que les pirates aient peu de chance d'endommager un réseau, il faut construire des graphes complets..oui, mais relier tous les ordinateurs ensemble nécessite beaucoup trop de cables..par exemple avec 1000 ordianeturs, il faudrait un demi-million de cables[5] !!!
Tu vas donc devoir trouver des graphes où chaque sommet est relié à un petit nombre de voisins et pour lequel le taux d'expansion n'est pas trop petit.
Ce type de graphes est appelé une **famille de graphes expanseurs** !
Dans cette partie, tu ne cherches plus à identifier les propriétés d'un graphe mais tu vas regarder une suite de graphes. Tu vas en effet regarder comment un graphe évolue au court du temps..alors, oui, dis comme ça, ça parait vraiment étrange mais tu vas voir que les notions sont très proches de tout ce que tu as dans les ateliers Jeu de la Vie et Haricots Magiques et Diffusion..

Pour comprendre cette évolution de graphe, prenons un exemple :
Dans la tribu des Partagetout, la richesse se mesure en coquillages. Les Partagetout ont une curieuse coutume : chaque année, chaque Partagetout partage la moitié de ses coquillages équitablement entre tous ses amis.
Complète alors le deuxième graphe en appliquant la règle de partage précédent. Tu as ainsi sous tes yeux (ébahis !) une suite de graphe !



5. Dans un graphe complet à N sommets, l y a $1 + 2 + 3 + ... + N = \frac{N(N-1)}{2}$ arêtes

Pour savoir si la famille de graphe qu'on est en train de construire est une **famille de graphes expanseurs**, il faut définir une nouvelle constante que l'on appelle la constate de répartition. Cette constante mesure la vitesse à laquelle les coquillages vont se répartir équitablement dans toute la tribu. Cette constante dépend de la manière dont chaque sommet est relié aux autres sommets[6][7].

ETAPE 3 : Un résultat amusant pour finir !

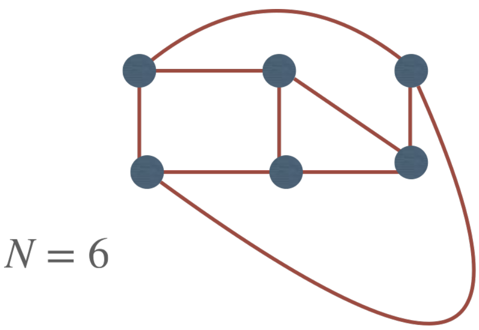
Alors oui, vous allez me dire..tout ça c'est bien joli mais comment on fait pour construire une famille de graphe expanseurs facilement. Et bien un résultat très récent (démontré en 2003 puis simplifié en 2020 !) montre que

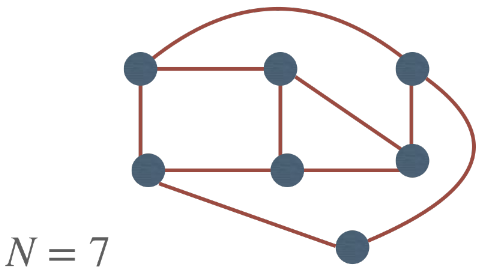
Si on choisit une famille de graphes au hasard, il est très probable qu'ils soient expanseurs

Trop facile ! ! Alors ça va être à toi de produire des graphes aléatoires et donc très probablement expanseurs ! !

Mais en fait ça veut dire quoi choisir au hasard un graphe et est-ce que c'est toujours possible ?

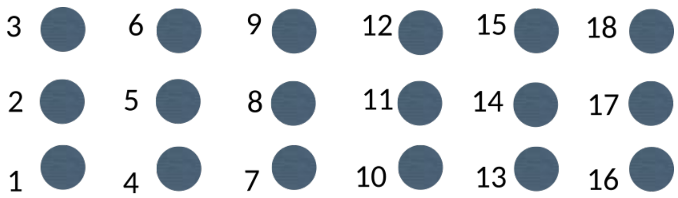
Par exemple, peux-tu dire que chacun des sommets des graphes ci-dessous sont relié à 3 arêtes ?

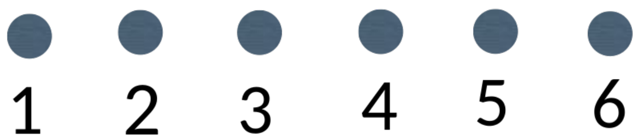




Pour qu'il existe des graphes à N sommets où chacun est relié à d arêtes, il faut que $N \times d$ soit pair.

Tu vas commencer par construire un graphe au hasard ayant 6 sommets et où chacun des sommets est relié à 3 arêtes. Il y en a déjà un au dessus mais pour en construire d'autres "facilement", tu vas utiliser la méthode des appariements de Bollobás. Pour cela, tu as à ta disposition 18 "papiers" avec les nombres allant de 1 à 18. Tire au hasard dans ces papiers et relie les sommets notés de 1 à 18 au fur à mesure. Une fois que tout est relié, tu relieras les sommets de 1 à 6 correspondants (chaque colonne de trois points correspondants à un des sommets).





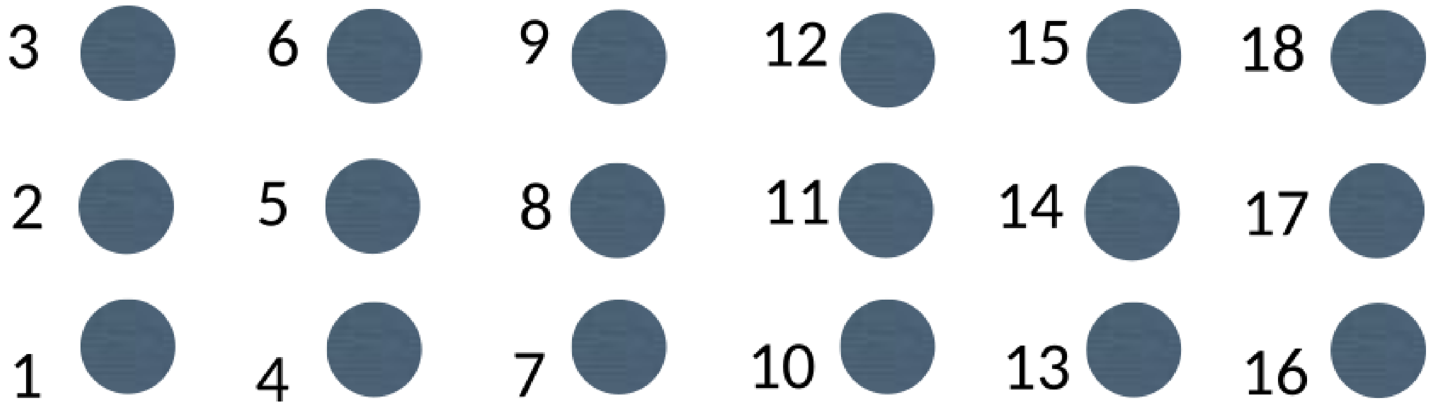
---

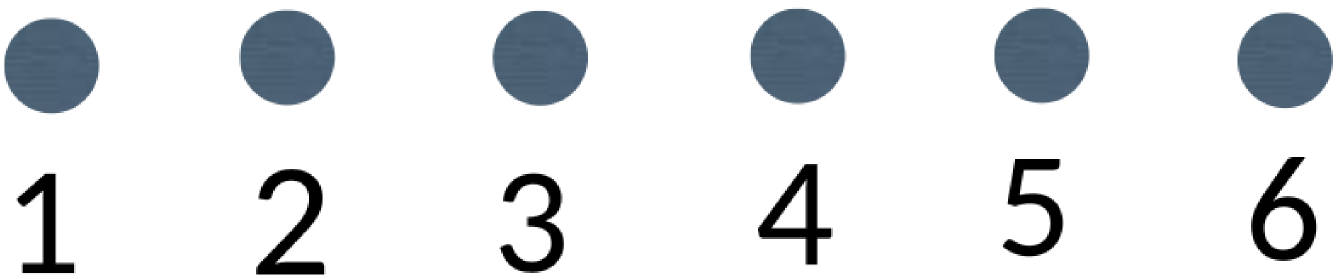
6. Pour vous collégiens, on ne rentre pas dans les détails techniques mais cette constante est liée à la variance du nombre de coquillages

7. Pour les experts, on peut préciser la notion de taux d'expansion d'une famille de graphe par les inégalités de Dodzuik-Alon-Milman (1985)

En suivant la même méthode, tu peux dessiner ceux que tu auras obtenus grâce au tableau effaçable que l'on t'aura donné dans le cadre ci-dessous.

Compare tes résultats avec les résultats de la classe et conclus !


3 6 9 12 15 18
2 5 8 11 14 17
1 4 7 10 13 16


1 2 3 4 5 6

18	18	18	18
17	17	17	17
16	16	16	16
15	15	15	15
14	14	14	14
13	13	13	13
12	12	12	12
11	11	11	11
10	10	10	10
9	9	9	9
8	8	8	8
7	7	7	7
6	6	6	6
5	5	5	5
4	4	4	4
3	3	3	3
2	2	2	2
1	1	1	1